

QUESTION 1 (Q1) – Déformation de barres**(Total : 12 points)**

A la **Figure 1 ci-dessous**, une structure toute en acier $E = 200 \text{ GPa}$ est fixée à un mur en A.

Des points A à C, elle est composée des deux barres parallèles liées en B à une barre simple, de forme circulaire. La plaque mince liant les poutres en B se déplace sans se déformer. Les deux barres AB subissent la même déformation et la masse des barres est négligeable.

Une force $F_C = 5 \text{ kN}$, pointant dans la direction positive de l'axe des x, est appliquée au point C. Une autre force inconnue, F_B , pointant dans la direction négative de l'axe des x, est appliquée au point B.

Le système est soumis à une augmentation positive de température de 10°C .

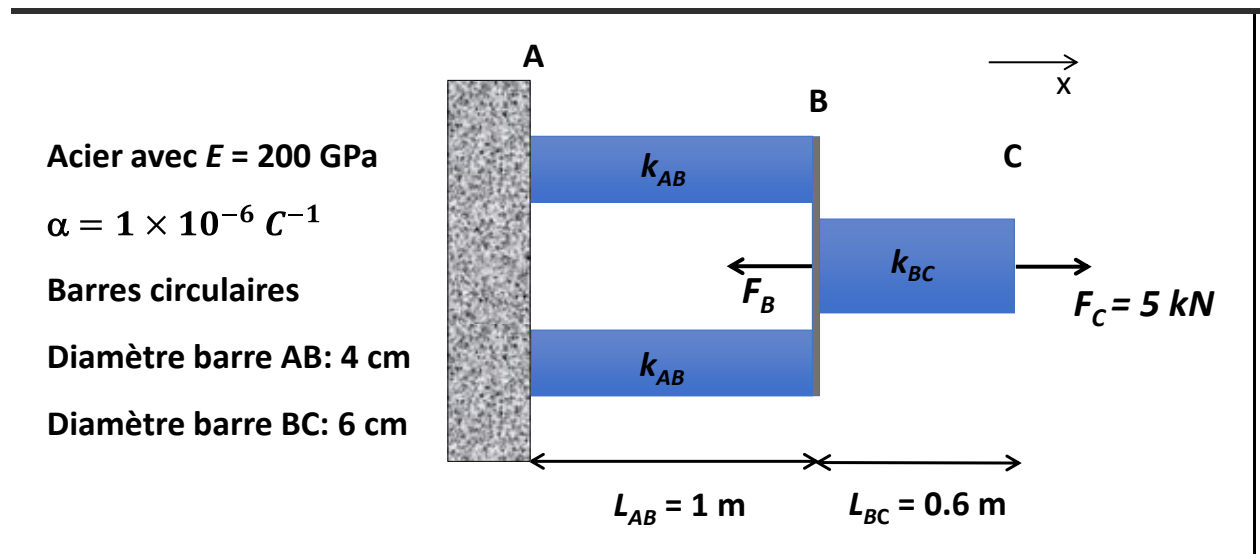


Figure 1: Structure composée de barres soumises à des forces axiales.

A la température initiale :

- a) [1 point] Dessiner le diagramme des corps libres de l'ensemble du système et donner l'expression analytique de l'équation d'équilibre.

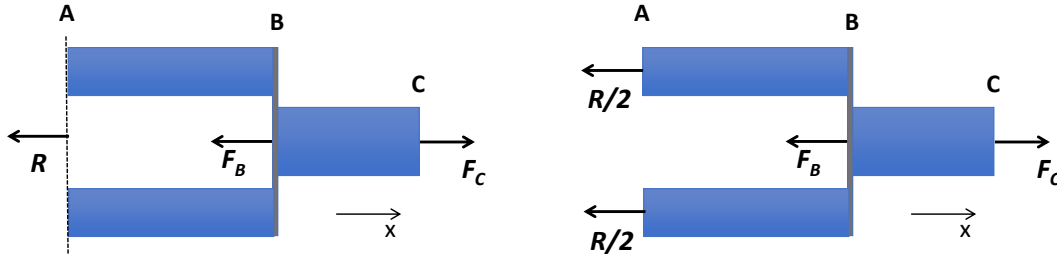
En tenant compte de l'augmentation de température de 10°C en b), c), d), et e):

- b) [2 points] Donner la valeur numérique du déplacement au point C dû seulement à cette augmentation de température.
- c) [5 points] Donner la valeur numérique de la force F_B appliquée pour que le déplacement au point C soit nul.
- d) [1 point] Exprimer la contrainte dans les segments AB en fonction des forces F_B et F_C et de l'aire.
- e) [3 points] Donner l'expression de l'énergie de déformation relative du système complet en fonction des forces appliquées, F_B et F_C , et des constantes de rigidité k_{AB} et k_{BC} .

QUESTION 1 – SOLUTION**(12 points)**

- a) [1 point] Dessiner le diagramme des corps libres de l'ensemble du système et donner l'expression analytique de l'équation d'équilibre.

Deux versions possibles du diagramme des corps libre :



Equation d'équilibre : $-R - F_B + F_C = 0$

- b) [2 points] Quel est le déplacement au point C dû à cette augmentation de température ?

$$\Delta L_{tot} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \alpha \Delta T \times (L_{AB} + L_{BC})$$

$$\Delta L_{tot} = 1 \times 10^{-6} \times 10^\circ C \times 1.6 m = 1.6 \times 10^{-5} m$$

- c) [5 points] Quelle est la valeur de la force F_B qui doit être appliquée pour que le déplacement du point C soit nul ?

$$\delta_{\Delta T} + \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$$

$$\delta_{\Delta T} = 1.6 \times 10^{-5} m \text{ et } A_{AB} = \pi \times 0.02^2, A_{BC} = \pi \times 0.03^2$$

$$\delta_{BC} = \frac{N_{BC}}{k_{BC}} = \frac{F_C}{\frac{EA_{BC}}{L_{BC}}} = \frac{F_C L_{BC}}{EA_{BC}}$$

$$\delta_{AB} = \frac{N_{AB}}{k_{AB}} = \frac{F_C/2 - F_B/2}{k_{AB}} = \frac{F_C - F_B}{2k_{AB}} = \frac{(F_C - F_B) L_{AB}}{2EA_{AB}}$$

$$\delta_{\Delta T} + \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{(F_C - F_B) L_{AB}}{2EA_{AB}} + \frac{F_C L_{BC}}{EA_{BC}} + \delta_{\Delta T} = 0$$

$$-\frac{F_B L_{AB}}{2EA_{AB}} + \frac{F_C L_{AB}}{2EA_{AB}} + \frac{F_C L_{BC}}{EA_{BC}} + \delta_{\Delta T} = 0$$

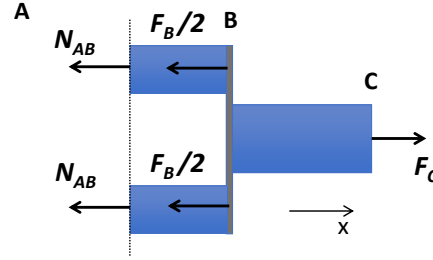
$$F_B = \frac{2EA_{AB}}{L_{AB}} \left(\frac{F_C L_{AB}}{2EA_{AB}} + \frac{F_C L_{BC}}{EA_{BC}} + \delta_{\Delta T} \right) = \frac{2A_{AB}}{L_{AB}} \left(\frac{F_C L_{AB}}{2A_{AB}} + \frac{F_C L_{BC}}{A_{BC}} + \delta_{\Delta T} E \right)$$

$$F_B = 15\,709 N$$

d) [1 point] Exprimer la contrainte dans les segments AB en fonction des forces F_B et F_C .

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} \text{ avec } N_{AB} = F_C/2 - F_B/2$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_C - F_B}{2A_{AB}}$$



e) [3 points] Donner l'expression de l'énergie de déformation relative du système complet en fonction des forces appliquées, F_B et F_C et des rigidités k_{AB} et k_{BC} .

$$U_{tot} = U_{AB} + U_{BC} \text{ avec } U = \frac{N^2}{2k}$$

$$\text{ou en utilisant: } U_{tot} = \int_0^\delta F d\delta = \int_0^\delta \delta * k d\delta$$

$$U_{tot} = \int_0^{\delta_{AB}} \delta_{AB} * 2k_{AB} d\delta + \int_0^{\delta_{BC}} \delta_{BC} * k_{BC} d\delta = k_{AB} * \delta_{AB}^2 + \frac{1}{2} k_{BC} * \delta_{BC}^2 \text{ avec } \delta = \frac{F}{k}$$

$$U_{BC} = \frac{F_C^2}{2k_{BC}}$$

$$\text{ou } U_{BC} = u_{BC} * V_{BC} = \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{BC}^2}{E} * L_{BC} A_{BC} = \frac{1}{2} * \frac{F_C^2}{E A_{BC}^2} * L_{BC} A_{BC} = \frac{F_C^2}{2k_{BC}}$$

$$U_{AB} = \frac{N_{eq}^2}{2k_{eq}} = \frac{(F_C - F_B)^2}{4k_{AB}} \text{ avec } k_{eq} = 2k_{AB}$$

ou en sommant pour les 2 barres AB:

$$U_{AB} = 2 * \frac{N_{AB}^2}{2k_{AB}} = 2 * \frac{(F_C/2 - F_B/2)^2}{2k_{AB}} = \frac{(F_C - F_B)^2}{4k_{AB}}$$

$$\text{ou } U_{AB} = u_{AB} * V_{AB} = \frac{1}{2} * \frac{\sigma_{AB}^2}{E} * 2L_{AB} A_{AB} = \frac{1}{2} * \frac{(F_C - F_B)^2}{E 4A_{AB}^2} * 2L_{AB} A_{AB} = \frac{(F_C - F_B)^2}{4k_{AB}}$$

$$\text{et donc } U_{tot} = \frac{(F_C - F_B)^2}{4k_{AB}} + \frac{F_C^2}{2k_{BC}}$$

QUESTION 2 (Q2) – Transformation des contraintes**(Total : 5 points)**

Considérer que tous les éléments de l'exercice suivant sont en deux dimensions (2D), c'est-à-dire que les contraintes et les déformations dans la direction Z sont nulles.

Important : Résoudre des systèmes d'équation uniquement numériquement ne rapportera aucun point. Une résolution analytique complète est demandée comme solution.

Les contraintes principales pour un élément bidimensionnel sont données comme suit : $\sigma_1 = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -35 \text{ MPa}$ (Figure 2, à droite). De plus, selon les axes x-y, σ_x est connu comme étant 25 MPa , alors que σ_y et τ_{xy} ne sont pas connus (Figure 2, à gauche).

- a) [3 points] Donner les expressions analytiques et les valeurs numériques de σ_y et τ_{xy} .
- b) [2 points] Donner l'expression analytique et déterminer la valeur numérique, en degrés, de l'angle θ_p des contraintes principales par rapport au système de coordonnées x-y.

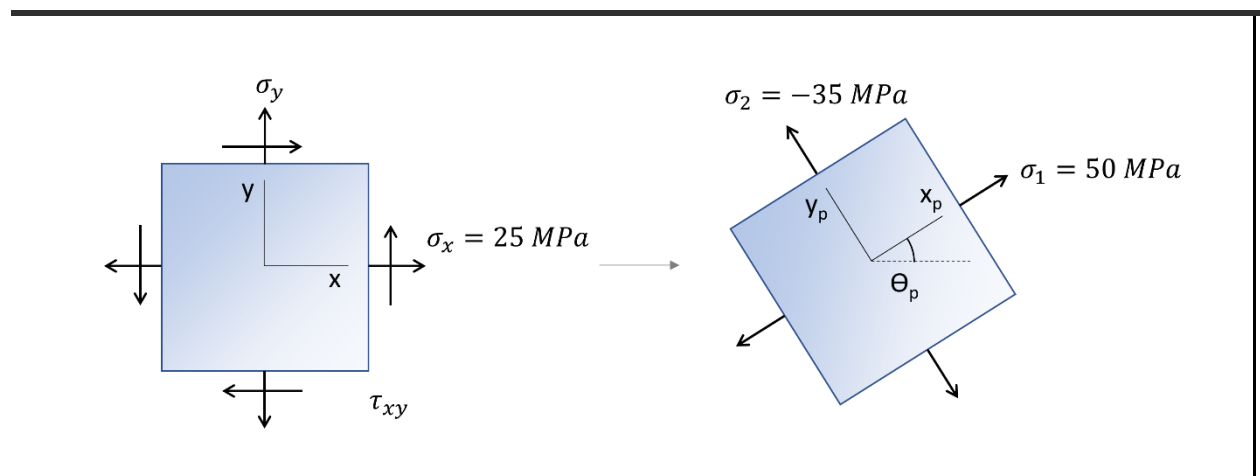


Figure 2 : Élément bidimensionnel avec une contrainte normale connue dans la direction de l'axe des x (à gauche), et le même élément avec les valeurs connues pour les contraintes principales (à droite).

QUESTION 2 - SOLUTION**(5 points)**

a) To determine the values for σ_y and τ_{xy} , we can use the following relationships:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= cst \rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_x \\ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy} &= cst \rightarrow \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \\ \rightarrow \tau_{xy} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Alternatively, τ_{xy} can be obtained from the equation for τ_{max} :

$$\begin{aligned}\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_2 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \rightarrow \tau_{xy} &= \sqrt{\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Numerical application:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= 50 + (-35) - 25 = -10 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= \sqrt{\left(\frac{50 - (-35)}{2}\right)^2 - \left(\frac{25 - (-10)}{2}\right)^2} = \pm 38.73 \text{ MPa}\end{aligned}$$

b) We can use the formula for the calculation of the angle of the principal axes:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 * 38.73}{25 - (-10)}\right) = \pm 32.84^\circ$$

The drawing indicates a positive θ_p and τ_{xy} , however the negative values are also correct. Note that the signs of τ_{xy} and θ_p must match, otherwise the stress state is not congruent with the exercise description.

Alternatively, point b) can be solved first, for example, as follows:

b) Knowing that the shear stress is 0 in the axes of the principal stresses:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta_p) + 0 * \sin(-2\theta_p)$$

Rearranging this equation yields:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2\sigma_x - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right)$$

Numerical application:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2 * 25 - 50 - (-35)}{50 - (-35)} \right) = \pm 32.84^\circ$$

a) The answer to point a) then follows using the transformation equations:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta_p) + 0 * \sin(-2\theta_p) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta_p) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\theta_p) + 0 * \cos(-2\theta_p) = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\theta_p) \end{aligned}$$

Numerical application as above.

QUESTION 3 – Contraintes et force maximales avec couple**(8 points)**

Une poutre métallique cylindrique homogène fixée à une extrémité est sous l'influence d'une force et d'un couple comme le montre la **Figure 3** ci-dessous. Au point C, un couple $\vec{T} = 50 \text{ [N * m]}$, et au point B une force normale $\vec{F} = F \vec{e}_x$ agissent sur la poutre.

Considérons que la poutre a les propriétés suivantes: $L = 1 \text{ [m]}$, $R = 1 \text{ [cm]}$, la contrainte limite d'élasticité $\sigma_{yield} = 250/\pi \text{ [MPa]}$.

- [1 point] Exprimer les contraintes normales, σ_x et σ_y , en fonction de la force F dans le segment AB (pas de valeurs numériques demandées).
- [2 points] Pour chacun des segments, AB et BC, exprimer la contrainte de cisaillement maximale en fonction de la force F et du couple T appliqués (pas de valeurs numériques demandées).
- [5 points] En utilisant le critère de la « Contrainte maximale » et pour un facteur de sécurité $FS=2$, calculer la valeur numérique de la force maximale F appliquée à la rupture.

Important en c) : Résoudre des systèmes d'équation uniquement numériquement ne rapportera aucun point. Une résolution analytique complète est demandée comme solution.

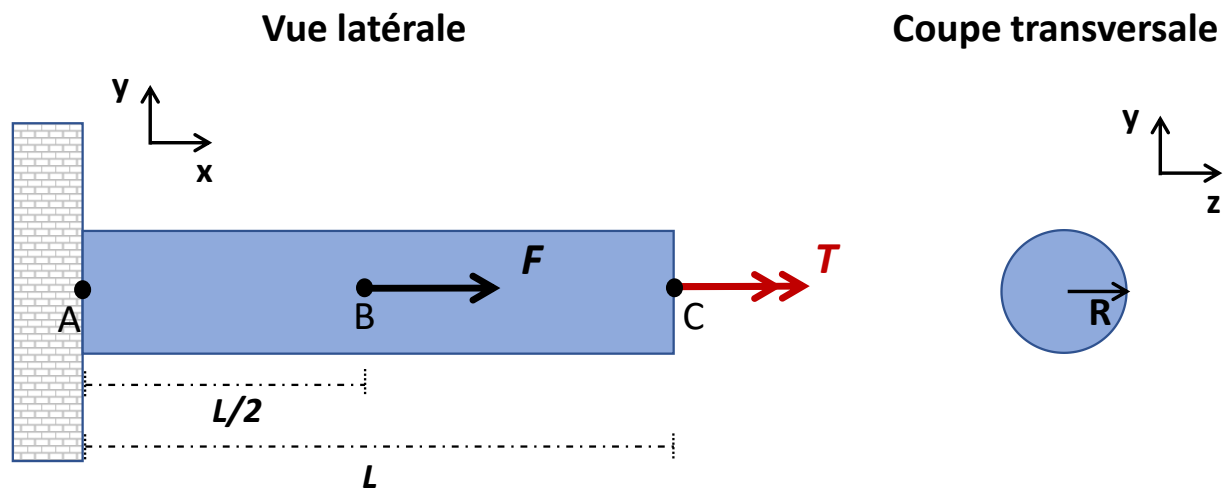


Figure 3: Poutre cylindrique soumise à des charges axiales et de torsion; vue latérale et coupe transversale.

QUESTION 3 – SOLUTION**(8 points)**

- a. [1 point] Exprimer les contraintes normales, σ_x et σ_y , en fonction de la force F dans le segment AB (pas de valeurs numériques demandées).

We define σ_x and σ_y as

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} \quad \text{and} \quad \sigma_y = 0$$

$$A = \pi R^2 = \pi(1 \text{ [cm]})^2 = 3.142 * 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

- b. [2 points] Pour chacun des segments, AB et BC, exprimer la contrainte de cisaillement maximale en fonction de la force F et du couple T appliqués (pas de valeurs numériques demandées).

For segment BC, we calculate torsional component of shear stress from the following formula which is maximum at the outer edge of the cylinder:

$$\tau_{xy} = \frac{T_{int} * r}{I_p} = \tau_{xy} = \frac{T * R}{I_p}$$

$$0 = -T_{int} + T \quad \text{so} \quad T_{int} = T$$

For segment AB: $\tau_{xy,max} = \pm \sqrt{\left(\frac{F}{2A}\right)^2 + \left(\frac{T * R}{I_p}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{F}{2A}\right)^2 + \left(\frac{2T}{\pi R^3}\right)^2}$

Since this is a cylinder made of a single, homogeneous material, we know:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} 2\pi \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} r^4$$

$$I_p = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} (0.01 \text{ [m]})^4 = 15.71 * 10^{-9} \text{ [m}^4\text{]}$$

Resulting in

$$\tau_{xy} = \frac{T_{int} * r}{I_p} = \frac{T * R}{\frac{\pi}{2} R^4} = \frac{2T}{\pi R^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T * R}{I_p} = \frac{(50 \text{ [N*m]}) (0.01 \text{ [m]})}{(15.708 * 10^{-9} \text{ [m}^4\text{]})} = 31.83 \text{ [MPa]}$$

- c. [5 points] En utilisant le critère de la « Contrainte maximale » et pour un facteur de sécurité $FS=2$, en reliant la contrainte maximale, σ_{max} , aux contraintes normales et de cisaillement, calculer la valeur numérique de la force maximale F appliquée à la rupture.

We define σ_{max} as

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{yield}}{SF}$$

$$\sigma_{max} = \frac{250}{2\pi} [MPa] = 39.79 [MPa]$$

We use the equation that can relate σ_{max} to σ_x and $\tau_{x,y max}$:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{yield}}{SF} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

We now implement these expressions and values in the formula for principal stresses:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{yield}}{SF} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2T_{int}}{\pi r^3}\right)^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{yield}}{SF} = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{A} + \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{A} + \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{2T_{int}}{\pi r^3}\right)^2} \right)$$

Method 1: Solving for σ_x

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

We rearrange this solution to solve as a function of σ_x :

$$2\sigma_{max} = \sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$(2\sigma_{max} - \sigma_x)^2 = \sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2$$

$$4\sigma_{max}^2 - 4\sigma_{max}\sigma_x + \sigma_x^2 = \sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2$$

$$4\sigma_{max}^2 - 4\sigma_{max}\sigma_x = 4\tau_{xy}^2$$

$$\sigma_x = \sigma_{max} - \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_{max}}$$

OR

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_{max} - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 &= \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \\
\sigma_{max}^2 - \sigma_{max}\sigma_x + \frac{\sigma_x^2}{4} &= \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \\
\sigma_{max}\sigma_x &= \sigma_{max}^2 - \tau_{xy}^2 \\
\sigma_x &= \sigma_{max} - \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_{max}} \\
\sigma_x = \sigma_{max} - \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_{max}} &= 39.79 \text{ [MPa]} - \frac{(31.83 \text{ [MPa]})^2}{39.79 \text{ [MPa]}} \\
\sigma_x &= 14.33 \text{ [MPa]} \\
F &= A * \sigma_x \\
F &= (3.142 * 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]})(14.33 \text{ [MPa]}) = 4500 \text{ [N]}
\end{aligned}$$

Method 2: Solving for F

$$\begin{aligned}
\sigma_{max} = \frac{\sigma_{yield}}{SF} &= \frac{1}{2} \left(\frac{F}{\pi r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{\pi r^2}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{\pi r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{\pi r^2}\right)^2 + 4\left(\frac{2T_{int}}{\pi r^3}\right)^2} \right) \\
\frac{\sigma_{yield}}{SF} &= \frac{1}{2\pi r^2} \left(F \pm \sqrt{F^2 + 8\frac{T_{int}^2}{r^2}} \right) \\
\left(2\pi r^2 \left(\frac{\sigma_{yield}}{SF}\right) - F\right)^2 &= F^2 + 8\frac{T_{int}^2}{r^2} \\
4\pi^2 r^4 \left(\frac{\sigma_{yield}}{SF}\right)^2 - 4\pi r^2 \left(\frac{\sigma_{yield}}{SF}\right) F + F^2 &= F^2 + 8\frac{T_{int}^2}{r^2} \\
\pi^2 r^4 \left(\frac{\sigma_{yield}}{SF}\right)^2 - \pi r^2 \left(\frac{\sigma_{yield}}{SF}\right) F &= 2\frac{T_{int}^2}{r^2} \\
F = \frac{1}{\pi r^2 \left(\frac{\sigma_{yield}}{SF}\right)} \left[\pi^2 r^4 \left(\frac{\sigma_{yield}}{SF}\right)^2 - 2\frac{T_{int}^2}{r^2} \right] \\
F = \pi r^2 \left[\frac{\sigma_{yield}}{SF} - \frac{4SF * T_{int}^2}{\pi^2 r^6 \sigma_{yield}} \right] \\
F = \pi * (1 \text{ [cm]})^2 \left[\frac{250}{2\pi} \text{ [MPa]} - \frac{4 * 2 * T_{int}^2}{\pi^2 * (1 \text{ [cm]})^6 * \left(\frac{250}{\pi} \text{ [MPa]}\right)} \right] \\
F &= 4500 \text{ [N]}
\end{aligned}$$